

岩体的自重为 mg ，隧道开挖后岩体的滑动位移为 u ， R_p 为围岩体塑性圈半径， R_e 为围岩体的弹性区的半径，在自重力 mg 的作用下，选取隧道周边径向位移 u_0 作为状态变量，……。”

由原文， R_p 为围岩体塑性圈半径，那么半径 $r \geq R_p$ 的圆以外的岩体均处在弹性状态。在岩体力学中有围岩塑性圈半径 R_p ，但没有弹性区的半径 R_e 一说，因为在 (R_p, ∞) 范围的围岩都处于弹性状态。

原文在力学模型中没有标出式 (4) 中下滑力的作用位置。按原文式 (4) 和以上论述，绘出厚为 h 的破碎岩体重力 mg 引起的下滑力 $mg \sin \alpha$ 方向与作用位置见图 1。

由破碎岩体（下文称软弱夹层）厚度为 h 和原文弹性段介质的本构关系式 (1) $\tau_1 = G_1 u/h$ 看到，原文意欲就图 1 夹层的左上侧面对右下固定结构面发生相对（位移或）剪切形变为 u 出发，来对问题展开讨论。原文没有阐明理由，便直接给出隧道围岩系统总势能式 (4)，而原文式 (4) 中的 $\int_0^u S_1 \frac{G_1 u}{h} du$ 为图 1 夹层中长为 S_1 的弹性段与左上完整岩体连生的上侧面相对于右下固定结构面相对位移为 u 时所蓄或所消耗的能量。式 (1) 及式 (1) 中第 1 个积分式表明原文 1 中只有一个滑动面。

原文式 (4) 积分号后 2 倍的物理意义是什么？是假定软弱夹层右下固定结构面和左上完整岩体均固定不动，而夹层岩体在下滑力 $mg \sin \alpha$ 的作用下向左下方向位移？这样夹层中岩体就可以有两个滑动面，就可解释式 (4) 积分号为什么有个 2 倍。但是，按照两个滑动面的分析模型，假定夹层两侧固定不动，受下滑力 $mg \sin \alpha$ 作用的夹层内变形很复杂，除了剪切变形外，还有拉、压变形，并且拉、压变形与剪切变形有同地位，势函数中必须要增加拉、压应变能部分。夹层断面上中央位移最大，由于对称性，这时夹层中轴面上的切应力、切应变为 0，中轴面两边的切应力-剪切变形关系式 (1) 不能写成 $\tau_1 = Gu/h$ ，而要写成 $\tau_1 = Gu/(h/2)$ ，式 (4) 中要写为 2 个 $\tau_1 = Gu/(h/2)$ 。由材料力学，作用在刚体上的力可沿其作用线传动，而夹层弹性段和软化段都是变形体，分布在夹层轴线上的岩体体积力 $mg \sin \alpha / (S_1 + S_2)$ 不能传递到图 1 夹层弹性段的顶部，写成合力形式 $mg \sin \alpha$ ，而要以分布力的形式连续作用在夹层轴线上，这样沿夹层长度 $(S_1 + S_2)$ ，由于拉、压和剪切变形引起的位移便不是常数，而是长度的函数，不能简单统一地写成 u 。

②本构模型中的问题

据式 (1)~(3) 绘出的夹层弹性区段和软化区段的本构模型曲线见图 2。原文图 1 左上方完整下滑岩体右下边缘与夹层的弹性区段和应变软化区段左上边缘是连在一起的，即有着相同的位移 u 。为什么在位移 $u=0$ 时，弹性区段的切应力令其为 0， $\tau_1 = 0$ ，而软化区段的切应力却已经达到剪切强度， $\tau_2 = \tau_m = \tau_{\max}$ 。如果不是人为事先对夹层中软化介质施加预应力，实际夹层中不会有这样的两种介质共存，这样的本构模型选得没有道理。

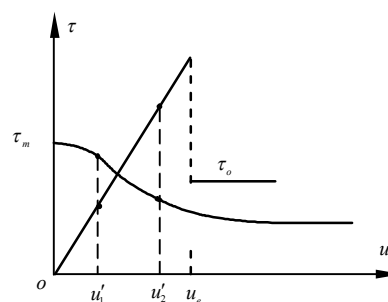


图 2 原文夹层介质的本构模型

Fig.2 Constitutive model of the narrow layer medium in original text

③只有介质 1 的弹性参数没有残余强度参数岩体不会下滑

原文图 1 夹层中弹性区段与应变软化区段形变（上侧位移） u 相同，它们以并联形式分担承受下滑力 $mg \sin \alpha$ 。岩石的弹性应变极限 $\varepsilon_e = u_e/h$ 很微小，完整岩体要下滑，不仅软化介质 2 要历经图 2 中其本构曲线拐点 $\hat{u}$ 以右的残余强度阶段，夹层中原先处于弹性状态的介质 1 的力与形变也要历经其本构关系的残余强度阶段。

原文是在势函数式 (4) 或求导后的平衡方程式 (6) 为基础来对问题进行讨论的。在式 (4) 中只有介质 1 的弹性参数 G_1 ，而没有表征介质 1 处于残余强度状态的参数 τ_o 。这表明原文的总势能式 (4) 只能对 $(0, u_e)$ 区间内系统稳定的状况进行分析，而不能对大于 u_e 的完整岩体下滑状态进行分析。但实际上原文却用式 (4) 导出的结果对左上方完整岩体下滑进行了讨论了（突变、跳跃表示完整岩体下滑，原文表 2 第 4 栏下方围岩的突变破坏和下文图 4 中状态变量 $x = (u - \hat{u})/\hat{u}$ 从平衡曲面下叶 n 点跳到上叶的 n' 点）。

④要按“确定性”法则截取函数的 Taylor 展开式

原文第 3 节记围岩拱顶下沉位移 S ，并用

$S(t) = f(t)$ 表示围岩拱顶随时间的变化, 其中 t 为累计天数, 将 $S(t)$ 作 Taylor 级数展开为

$$S(t) = f(t) = 1 + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=1} (t-1) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{t=1} (t-1)^2 + \cdots + \left. \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right|_{t=1} (t-1)^n + \cdots \quad (10)$$

原文截取上式到 $(t-1)^4$ 项, 得到

$$S(t) = \sum_{i=0}^4 a_i t^i \quad (11)$$

并进行

$$t = x - a_3 / (4a_4) \quad (12)$$

等变换将式 (11) 化成最高幂为 x^4 的原文称之为围岩稳定模型的表达式为

$$\bar{S} = \frac{x^4}{4} + \frac{\mu}{2} x^2 + \nu x + c \quad (13)$$

式 (13) 是尖点突变模型标准形式。原文在式 (13) 下方给出: “据尖点突变模型, 隧道位移稳定状态的判别式即突变阈值为: $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2$, 突变判别法则为 $\Delta \leq 0$, 则围岩失稳; $\Delta > 0$, 则围岩稳定。”

原文是在对问题作研究之前, 便决定要将围岩失稳归结为尖点突变, 故将 $S(t)$ 的展开式在 t^4 处截断。要是有人将式 (10) 的展开式在 t^3 或者 t^5 处截断, 又或者在 t^6 处截断, 那么还可以将围岩失稳归结为折叠、燕尾或者是蝴蝶突变模型吗? 折叠, 尖点, 燕尾与蝴蝶突变在其原点附近的拓扑结构是完全不同的, 它们所描述的自然现象的本质是完全不同的。突变理论的运用者对这一点应当有所了解。

突变理论解决的一个重要问题, 是在哪里截断一个函数的 Taylor 展开式为安全的问题。所谓安全, 就是要求这样得到的有限项级数能在函数展开点的小邻域内忠实代表原来的拓扑结构, 定量近似也是正确的。如果一个函数的 Taylor 展开式的前 k 项足以刻画这个函数的性态, 即此前 k 项与该函数在展开点的小邻域内有相同的拓扑结构, 则称这个函数是 k 确定的。在一元函数的简单情况下, 第一个系数不为 0 的最低次项就决定了函数的性态, 这是与常识相一致的^[2]。凌复华在文献[2-3]中详细讲述了“确定性”问题。所以特别要认识到, 应用突变理论, 不能仅凭主观臆断随意地截断一个函数的 Taylor 展开式, 随意地保留多少项, 舍去多少项。

⑤失稳、跳跃发生在 $4\mu^3 + 27\nu^2 = 0$ 的分叉集 B 上

尖点突变平衡曲面包含 $x=0$ 的中叶, 势函数的 2 阶导数 $V'' = 3x^2 + \mu < 0$, 系统状态不稳定; 曲面

上叶和下叶, 势函数的 2 阶导数 $V'' = 3x^2 + \mu > 0$, 系统状态稳定; 曲面的奇点集 S 上, $V'' = 3x^2 + \mu = 0$, 系统处于临界状态。分叉集 B 满足方程 $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2 = 0$ 。在曲面的下叶上, 参数 ν 负向变化到分叉集 B 左分支时, 状态变量 x 变化到奇点集 S 左分支 (图 3), 稍受干扰, x 便跃到曲面 M 的上叶。

原文给出隧道围岩稳定性判别法则为: $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2 \leq 0$, 则围岩失稳; $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2 > 0$, 则围岩稳定。并绘出状态变量 x 随式 (7) 中参数 ψ 失稳、跳跃如图 4 所示。

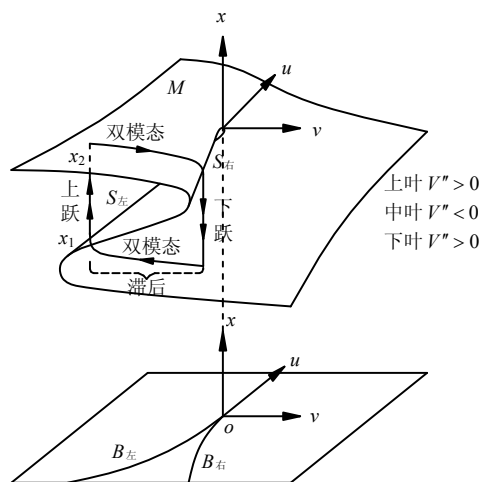


图 3 尖点突变模型的基本指征

Fig.3 Fundamental indicator of cusp catastrophe model

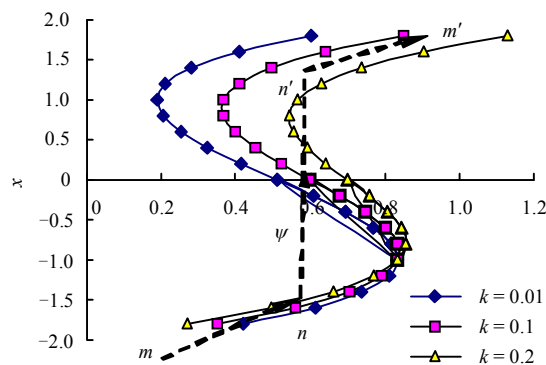


图 4 控制变量 x 随几何参数 ψ 的变化曲线^[1]

Fig.4 The curves of controlled variable x along geometric parameter ψ

在图 3 尖点突变平衡曲面 M 的下叶, 控制点位于分叉集围成尖角形区内时, $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2 < 0$, 但是其 2 阶导数 $V'' = 3x^2 + \mu > 0$, 按 Dirichlet 法则, 系统处于稳定状态; 原文用 $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2 \leq 0$ 判别围岩失稳的方法有误, 原文表 2 第 4 栏中用 $\Delta = 4\mu^3 + 27\nu^2 = -5.44 \times 10^4 < 0$ 判定隧道围岩失稳, 并用其去

对应实际隧道围岩失稳的做法没有根据。此外, 状态变量 x 失稳跳跃发生在平衡曲面 M 的左右奇点集 S 处, 原文在图 4 中将 x 起跳点叠绘曲面下叶非 S 集的 n 点处, 易混淆视听。

⑥时间不能发生跳跃式、不连续变化

由物理学知, 量纲不同的物理量不能相加减。原文 (10)~(11) 中 t 是时间, 时间的量纲为 $[T]$ 。由式 (11) 变换 $t = x - a_3/(4a_4)$ 可知, x 的量纲也为 $[T]$, 故 x 也是时间。原文将尖点突变模型标准形式 (13) 作为围岩稳定模型表达式, 式 (13) 中的 x 是状态变量, 而 $x = t + a_3/(4a_4)$ 。

突变理论是描述参数连续变化导致系统状态不连续变化的理论, 其状态变量 x 是要发生跳跃的。

图 3 中尖点突变的分叉集 B 左分支 ($v < 0$) 上的同一组 (μ, v) 值, 有两个 x 值与其对应, $x_1 = -(-\mu/3)^{1/2}$, $x_2 = 2(-\mu/3)^{1/2}$ 。按原文, 在 B 集左支状态变量时间 x 从下叶的 x_1 跳到上叶的 x_2 , 突变、跳跃幅度 $\Delta x = x_2 - x_1 = 3(-\mu/3)^{1/2}$ 。时间能发生不连续变化吗? 时间能突变、能跳跃吗? 恐怕不能。

图 5 是文献[4]在普通 WE600 试验机上, 用光电位移传感器和微机高速采样技术测得的, 花岗岩小试样作单轴压缩失稳破裂的 $f(u)-t$, $u-t$ 时程曲线, 采样程序编制使得在试样失稳破裂阶段微机自动转入快采样, 其他阶段微机自动慢采样。从试验结果看出, 失稳破裂时试样形变和强度明显呈不连续变化, 形变突跳值 $\Delta u = u_s - u_j$, 荷载降突跳值 $\Delta f = f_j - f_s$; 试验中时间 t 始终是连续变化的。事实上任何一起工程地质灾害突发生过程中时间 t 都是一微秒一微秒连续变化过去的, 而不是跳跃或不连续方式变化过去的。不能用从平衡曲面下叶向上叶跳跃或不连续变化方式去进行描述时间连续变化

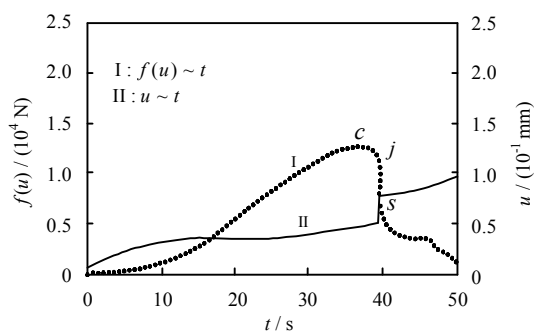


图 5 花岗岩试样失稳破裂时的 f (荷载)- t 和 u (形变)- t 关系
Fig.5 f (load)- t and u (deformation)- t relationships of granite sample with destabilization failure

的特性。美国科幻影片中时光跳跃式变化, 隧道围岩失稳中是不存在的。

⑦图 1 力学模型不存在跳跃失稳和弹性能瞬间释放机制

在岩样单轴压缩脆坏试验中试验机与岩样以串联形式承受轴向压力, 机身将作用在试验机油缸活塞端面的油力全部传给岩样, 在岩样峰后软化承载力减小、形变增大过程中, 试验机回弹卸载, 形变减小, 并释放弹性能。在岩样峰后软化特性较强的情况下, 试验机释放的弹性能会超过岩样形变、破裂消耗的能量, 所超过的能量部分于瞬间转换为系统动能, 促成岩样失稳破裂(脆坏), 其图解形式如下:

在对岩样加载过程中, 机身的受力 N 、形变 u_m 也在增大。试验机处在弹性状态, 其作用相当于一个刚度为 k_m 的弹簧。试验机压头和岩样间的作用力 $f(u)$ 与反作用力 N 是系统内力, 故有 $N = f(u)$ 。试验机的荷载-形变关系 ($N-u_m$) 为图 6 中从原点出发斜率为 k_m 的半直线 om ; 岩样的荷载-形变关系 $f(u)-u$ 为图 6 中有弹性、非线性硬化和软化段具拐点 t 的曲线。在对岩样加载形变 u 增大过程中, 机身内力 N 、形变 u_m 沿 om 线增大。在 $f(u)$ 曲线峰后, 试验机开始卸载。按照 Cook 刚度判据, 该系统在 $f(u)$ 曲线上斜率 $f'(u_j) = k_m$ 的点 j 失稳, 动力失稳在曲线拐点 t 以下斜率 $f'(u_s) = k_m$ 的 s 点 j 结束。图 6 纵轴左侧从 u_{mj} 到 u_{ms} (形变减小), 试验机释放弹性能为直角梯形面积 $ju_{mj}u_{ms}sj$; 纵轴右侧从 u_j 到 u_s (形变增大), 岩样破裂消耗的能量为曲边梯形面积 ju_ju_ssj 。将左侧的面积 $ju_{mj}u_{ms}sj$ 平移到纵轴右侧的 j 点再减去面积 ju_ju_ssj 后得到的阴影区面积 ΔE , 即为岩样失稳破裂时, 试验机释放的超过岩样破裂消耗能量之后的应变能部分。

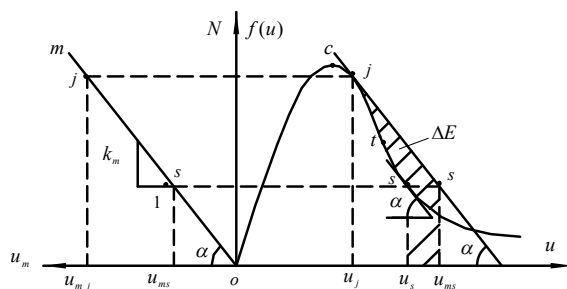


图 6 岩样失稳破裂试验机弹性能释放量
Fig.6 Elastic energy releasing amount of test machine with destabilization failure of rock sample

类似于岩样压缩脆坏试验,在岩体系统失稳瞬间,除了岩体动力破裂,还有大量弹性能释放,整个系统发生能量跃迁。殷有泉的断层地震模型中围岩与断层以串联形式承受剪力,围岩将远场所施加的剪力全部传给断层,在断层峰后软化承剪力减小、剪切形变增大过程中,处于弹性状态的围岩回弹卸载(剪切形变减小)并释放应变能,围岩释放的超过断层破裂消耗能量之后的弹性应变能部分,于瞬间转换为围岩-断层系统动能,造成地震。

前文已陈述夹层内岩体体积力以分布力的形式连续作用在夹层轴线上,不能传递到图 1 夹层弹性段的顶部,故原文图 1 夹层弹性段与应变软化段以并联形式各自分担下滑力的一部分,图 1 中夹层左上边缘与完整岩体右下边缘连生,有着相同的位移。所以,与断层地震及试验机-岩样系统失稳时的“断层、岩样软化承载力减小形变增大,围岩、试验机回弹卸载形变减小”的性态相反,夹层的弹性段与应变软化段在任何情况下都有着相同的形变 u 。

图 3 中, x 从曲面 M 下叶的 $x_1(<0)$ 跃到上叶 $x_2(>0)$, 由 $x_2 > x_1$ 及式 (7) 的 $x = (u - \hat{u})/\hat{u}$ 可得到隧道围岩失稳后夹层的形变 u_2 大于临失稳前的形变 u_1 。不知道此 u_1 、 u_2 , 在原文图 2 的应变软化曲线上对应是哪两点? 图 3 中状态变量 x 从曲面 M 下叶跃 x_1 到上叶 x_2 瞬间系统是要释放能量,发生能量跃迁的。然而,随着图 1 中夹层形变 u 增大,弹性介质和应变软化介质都在吸收能量,图 2 中两条本构曲线下的面积都在增大,弹性介质和应变软化介质都不释放能量,这种状况在任意的 u'_1 , $u'_2(>u'_1)$ 两点之间也不曾改变。

在夹层弹性段与应变软化段形变相同、以并联形式分担下滑力且其左上完整岩体为刚体的力学模型中,不存在夹层应变软化段跳跃式失稳和系统弹性能瞬间释放机制,不能用图 3 或图 4 中 x 从曲面下叶到上叶的跳跃性状进行描述。

⑧尖点突变模型与隧道围岩失稳原型的特性比较

任何研究中,原型的主要特征在由原型归结得

到的数学模型中应有所表现。反之,由原型归结得到的数学模型中的某一状态,原型中应有其对应状态,而模型的主要特征,原型中要有相应的表现。这样的数学模型,才是原型应当对应模型,这是一个基本道理和准则。原文指示其系统平衡位置 x 只能沿图 3 曲面下叶箭头指示的路径变化或取值。但是在尖点突变模型平衡曲面 M 上,状态变量 x 可以上跃,也可以反向下跃。 x 向上跳跃到反向下跃到时参数 v 的滞后特性以及参数变化时 x 在上、下叶上的两个稳定状态 ($V'' > 0$) 可以循环往复实现的特性,是尖点突变基本的特性。凌复华先生将它们称为尖点突变的基本指征^[4]。

图 1 中隧道围岩失稳不可逆,既不能反向跳跃(失稳后围岩又突然恢复原状),又没有滞后特性。尖点突变的 3 个基本特征在原型中都没有,何能将尖点突变模型作为隧洞失稳原型的数学模型。

参考文献

- [1] 祝云华, 刘新荣, 黄明, 等. 深埋隧道开挖围岩失稳突变模型研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(3): 805—809.
ZHU Yun-hua, LIU Xin-rong, HUANG Ming, et al, Surrounding rock instability based on catastrophe model of deep-buried tunnel excavation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(3): 805—809.
- [2] 凌复华. 突变理论——历史、现状和展望[J]. 力学进展, 1984, 14(4): 289—403.
LING Fu-hua. History, present and advances of the catastrophe theory advances in mechanics[J]. **Advances in Mechanics**, 1984, 14(4): 289—403.
- [3] 凌复华. 突变理论及其应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1987.
- [4] TANG C A. Sudden jump of deformation in unstable failure of rock[C]//Proceedings of the 8th int. Congress on Rock Mechanic. Tokyo: [s. n.], 1995: 197—199.